4 BERNOULLI

4.1 Jacob, Jacques, James o Giacomo?

Se qualcuno mi chiedesse: «Chi era Bernoulli?» la mia risposta sarebbe: «Bernoulli chi? C'è una coniglieria di Bernoulli!». Infatti, con una semplice ricerca scopriamo che di Bernoulli ce ne son stati davvero tanti e tutti affermatesi nei medesimi campi della matematica e della fisica. È più comodo riferirsi a loro come famiglia dei Bernoulli piuttosto che con uno dei suoi membri: quando si incontra una formula con scritto *Bernoulli* ci si dice: «beh, uno della *famiglia*»:

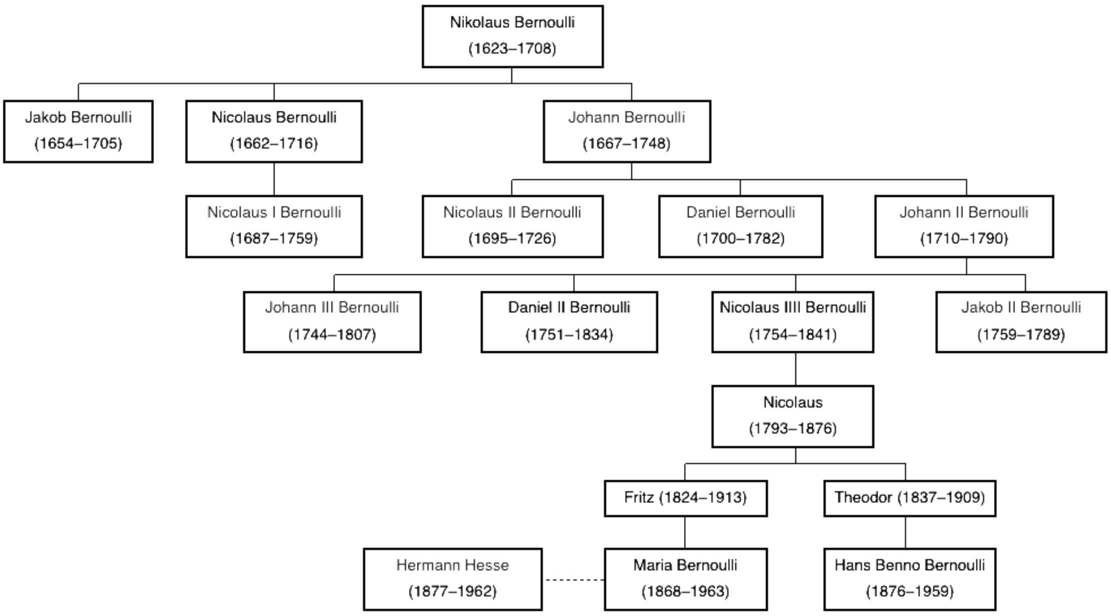


Figura 1: La geneologia dei Bernoulli. Nella storia della matematica nessuna famiglia ha prodotto così tanti matematici celebri!

Da notare lo *scoop* alla fine dell'albero genealogico: il grande Herman Hesse si unì con una discendente dei Bernoulli![1]

A questo punto sorge spontanea la domanda: «Chi è il Bernoulli che abbiamo in biblioteca?». Se andiamo a guardare la cornice, leggiamo il nome *Jacob*. Ma i problemi non son finiti. Jacob Bernoulli è noto anche come Jacques, James, Jakob e Giacomo Bernoulli. Cioè, non solo abbiamo una coniglieria di Bernoulli, ma prendendone uno

1 Nel 1904 Hermann Hesse (autore del meraviglioso libro Siddharta) sposò Maria Bernoulli (1869-1963), una fotografa professionista discendente dei celebri scienziati.

a caso ha cinque nomi diversi. Non solo, rischiamo pure di confonderlo col fratello minore Jean Bernoulli (a sua volta noto come John oppure Johann).

Perché così tanti nomi? Jacob Bernoulli viaggiava molto per incontrare gli altri scienziati e tenersi sempre al corrente dei problemi matematici del suo tempo. A seconda della nazione che visitava, veniva conosciuto col nome equivalente del luogo: tanto era forte il desiderio da parte delle varie nazioni di appropriarsi della fama di un così celebre scienziato. In realtà, il nome originale dovrebbe essere Jacques e non Jacob. Il nome Jakob è una forma tedesca, mentre James è la forma anglicizzata. Giacomo è visibilmente il suo nome in italiano.

Per scelta, nel seguito ci riferiremo a lui così come la cornice della biblioteca ce lo presenta: *Jacob Bernoulli, nato nella città svizzera di Basilea il 27 dicembre 1654 e morto a Basilea il 16 agosto 1705*.

Figura 2: La cornice di Jacob Bernoulli nella nostra biblioteca.

L'osservatore attento dirà: «Ma non hai scritto che è nato nel 1654? Nel poster c'è scritto 1655!». Effettivamente è una discordanza che ha colpito anche me. Consultando il libro scritto da Carl. B. Boyer, *Storia della matematica*[2], il grande studioso ha riportato la data del 1654, ma

2 Me lo consigliò la mia cara Professoressa di matematica Zappalà Filippa alle scuole superiori (grazie Prof!) e fu un ottimo acquisto: è un libro davvero ben fatto!
Nella nostra biblioteca abbiamo la prima edizione italiana ISEDI (gruppo De Agostini) del 1976 (praticamente decisero di pubblicarlo in Italia l'anno della morte

anche da altre fonti ho trovato sempre la data del 1654. Un'ipotesi potrebbe essere questa: trattandosi del 27 Dicembre 1654 i realizzatori del poster hanno voluto *approssimare* al valore 1955 come a dire «*Vabbé, si, praticamente è nato nel 1655, l'anno 1654 manco l'ha visto Jacob!*». Ci sarebbe da indagare, ma si tratta solo di date, non saranno quattro giorni alla nascita a fare la differenza in quella che è stata la vita di Jacob. Andiamo piuttosto a vedere quali erano le cose belle in cui il matematico ha speso la sua vita.

4.2 COSA PIACEVA A JACOB

Di sicuro a Jacob non piacevano i piani che suo padre Nikolaus[3] Bernoulli (1623-1708) aveva per lui e i suoi fratelli: Jacob, che era il maggiore dei tre fratelli, era destinato al clericato. Il fratello minore Jean avrebbe dovuto diventare mercante o un medico. In breve, il padre ostacolò l'interesse dei suoi figli per la matematica. Sembra che la famiglia dei Bernoulli, prima dei figli di Nikolaus, si sia dedicata quasi sempre al commercio. In pratica il nostro Jacob fu uno dei primi a cambiare le tradizioni familiari dirottandole verso lo studio della matematica.

Jacob era infatti affascinato dai problemi delle curve e dal calcolo infinitesimale, in particolare dai problemi sugli infinitesimi. Ai tempi di Jacob per *infinitesimo* si intendeva una "speciale" quantità che gode delle seguenti proprietà:

- un infinitesimo è minore di qualsiasi numero reale positivo eppure ancora maggiore di zero;
- tra gli infinitesimi valgono le ordinarie regole dell'algebra;

Tale definizione faceva parte degli insegnamenti di Gottfried Leibniz (1646-1716) di cui Jacob era un'entusiasta seguace[4].

4.2.1 *Il problema di Basilea*

Uno dei problemi di cui era innamorato era la serie dei reciproci dei quadrati dei numeri interi:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots \qquad \text{(\textit{Problema di Basilea})} \qquad (1)$$

di Boyer). Andate di corsa dal Signor Ambra Vincenzo (il bibliotecaio) e fatevelo consegnare!

3 Non mi chiedete se si chiama Nicolaus, Niklaus o Nikolaus

4 Oggi il concetto di infinitesimo è stato rimpiazzato dal più rigoroso concetto di limite: anche se ancora oggi si utilizza la parola infinitesimo, in realtà ci si riferisce ad un limite e non alla definizione di Leibniz.

sapeva che questa serie era convergente, poiché ogni suo termine era minore uguale di ogni termine della serie:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots=2 \qquad (2)$$

(che è una variante della conosciuta serie di Mengoli, la quale sappiamo convergente). Tuttavia, Jacob non riuscì a calcolare la somma della serie dei quadrati dei numeri interi. Tale problema prese il nome di *problema di Basilea*, città sede dell'università dove Jacob insegnò dal 1687 al 1705. Fu proprio Jacob a portare il problema all'attenzione di un vasto pubblico tramite le pubblicazioni sull'*Acta Eruditorum*[5], anche se il problema era già stato proposto da Pietro Mengoli nel 1644, quando insegnava all'università di Bologna: quindi potremmo chiamarlo anche *problema di Bologna*. La pubblicazione del 1689 in cui Jacob enunciò il problema, era la stessa in cui lui e suo fratello Jean pubblicarono le loro dimostrazioni della divergenza della serie armonica[6]:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty \qquad (3)$$

Jacob chiese a chiunque fosse in grado di risolvere il problema (la serie 1) di comunicargli la soluzione. In breve tempo il problema diventò famoso nell'ambiente matematico, ma venne risolto quarantasei anni più tardi, nel 1735, e dopo la morte di Jacob, da un matematico vicino alla famiglia dei Bernoulli: si tratta di Eulero, che fu allievo del fratello minore Jean Bernoulli. Quando Jean venne a conoscenza del successo di Eulero, gli scrisse:

> «E così viene soddisfatto l'ardente desiderio di mio fratello che, rendendosi conto che la ricerca di tale somma era più difficile di quanto si sarebbe potuto pensare, confessava apertamente che tutti i suoi più ferventi sforzi erano stati vani. Se almeno fosse vivo ora!»

Sebbene abbiamo iniziato a parlare di Jacob proprio con un problema che non è riuscito a risolvere, furono davvero molteplici i problemi di cui riuscì a trovare indipendentemente una soluzione. Tra i problemi della sua epoca, c'era quello di trovare le equazioni di certe curve che oggi chiamiamo *isocrona*, *brachistocrona* e *lemniscata*. Sembra che Isaac

5 Uno dei primi periodici, fondato da O. Mencke, professore di Lipsia, e pubblicato dal 1682 al 1745. Scritto in latino, si proponeva di tenere i dotti al corrente delle novità scientifiche e letterarie europee. Vi apparvero scritti scientifici d'importanza eccezionale, fra gli altri lo studio col quale Leibniz gettò le basi del calcolo infinitesimale (1684).

6 I fratelli Bernoulli credevano di essere stati i primi a dimostrare la divergenza della serie armonica, ma prima di loro delle dimostrazioni (addirittura molto più semplici) vennero fatte da Nicola D'Oresme (1323-1382) e da Pietro Mengoli (1626-1686): ma queste dimostrazioni vennero ritrovate successivamente all'epoca Bernoulli.

Newton, Christian Huygens e Gottfried Leibniz avessero già studiato queste curve, ma Jacob le risolse indipendentemente e per primo pubblicò i suoi risultati tra il 1690 e il 1669 negli *Acta Eruditorum*. Infatti nei testi di matematica tali curve portano sempre il suo nome: *isocrona di Bernoulli*, *brachistocrona di Bernoulli*, *lemniscata di Bernoulli*.

4.2.2 *Il problema dell'isocrona e il primo uso della parola «integrale»*

Il problema dell'isocrona consisteva nel determinare quella curva in cui fatto scivolare un oggetto in assenza di attrito e riportato poi il suo moto sulla verticale, quest'ultimo fosse stato uniforme. In altre parole, trovare quella curva che rende uniforme il moto verticale di un corpo. In altre parole ancora: a tempi uguali di caduta devono corrispondere uguali altezze di caduta[7]. Tale proprietà era definita, con l'eleganza consentita dalla lingua latina, *descensus aequabilis*.

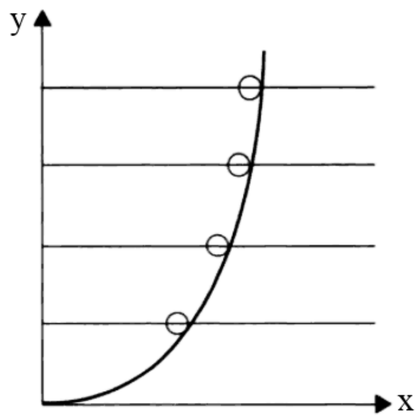


Figura 3: Isocrona, *curva descensus aequabilis*. Per una sfera, che rotoli lungo l'isocrona, a tempi uguali corrispondono uguali altezze di caduta.

Jacob dimostrò che l'equazione cercata è una parabola semicubica:

$$ay = x^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

nell'articolo in cui pubblicò il suo lavoro sull'isocrona nell'*Acta Eruditorum* del 1690, utilizzò per la prima volta il termine *integralis*. Leibniz, che fece i primi sviluppi del calcolo integrale, questo l'aveva chiamato *calculus summatorius* e pochi anni più tardi dell'articolo di Jacob, riconobbe che il termine *calculus integralis* era migliore per indicare l'inverso del *calculus differentialis*. In questo modo la parola «integrale» venne universalmente riconosciuta nel linguaggio comune della matematica ed ancora oggi usiamo tale termine.

7 Sembra un problema scemo, ma ricordando che un corpo che cade (qui sulla Terra) subisce un moto uniformemente accelerato (cioè man mano che cade la sua velocità aumenta) allora è spontaneo chiedersi: «in quale curva dobbiamo farlo rotolare affinché il moto verticale venga reso uniforme?». Non so se ora è più chiaro.

Rivolgendomi a tutti coloro che nel loro percorso hanno visto, usato o calcolato gli "integrali"[8], in particolare ai matematici, fisici ed ingegneri (che ne avranno maneggiati un milione nell'arco di pochi anni), da oggi sappiamo cosa pensare quando entriamo in biblioteca e vediamo Jacob: «Eccolo, è lui che ha inventato la parola *integrale*».

4.2.3 *Il problema della brachistocrona e una litigata in famiglia*

Leibiniz e i fratelli Bernoulli cercavano una soluzione al problema della brachistocrona, consistente nel trovare la curva lungo la quale una particella cadrebbe nel tempo più breve da un punto dato a un secondo punto dato, posto più in basso, ma non direttamente al di sotto del primo punto.

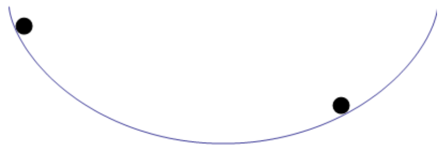


Figura 4: La cicloide è la curva che risolve il problema della brachistocrona, ossia di tempo minimo (dal greco *brachistos*, minimo, e *chronos*, tempo)

Jean aveva trovato, mediante una dimostrazione errata, che la curva doveva essere una cicloide; sfidò allora il fratello a scoprire quale fosse la curva desiderata. Dopo che Jacob ebbe dimostrato in maniera corretta che la curva cercata era una cicloide, Jean cercò di sostituire la propria dimostrazione con quella del fratello, cercando di farla passare per sua. Quando Jacob si accorse del plagio, nacque una disputa velenosa e il risultato fu una rottura definitiva tra i due fratelli: si racconta che Jean non mise più piede a Basilea fino alla morte del fratello. Non era la prima volta che i due fratelli litigavano. Anche nelle successive generazioni rimase piuttosto elevato il grado di litigiosità:

8 Per coloro che non sanno cosa sia un integrale. L'integrale, precisamente quello chiamato «integrale definito» può essere visto come un operatore matematico che trasforma un insieme, o una sua parte, in un numero. Un caso classico di trasformazione di un insieme in un numero è il calcolo delle aree e dei volumi: ad esempio, calcolare l'area di un rettangolo consiste proprio nel tradurre in un unico numero un insieme di informazioni (altezza, larghezza, posizione). Ora, nel caso di un rettangolo il calcolo è semplice. Ora, ipotizziamo di avere una figura con una forma irregolare, ma i cui contorni possano essere descritti mediante un'adeguata legge matematica: ecco, in quel caso tramite l'integrale abbiamo un metodo universale per calcolare l'area di una forma anche molto complicata. D'altro canto è vero che, in generale, la maggior parte delle "leggi" matematiche concepibili non sono integrabili in maniera classica e spesso ci dobbiamo accontentare di quelle che si chiamano «forme aperte» e degli sviluppi in serie: in altre parole, esistono "figure" per le quali non c'è modo di scrivere la formula esatta dell'area mediante un qualsiasi immaginabile incastro tra le operazioni (somma, differenza, moltiplicazione e divisione) e le comuni funzioni (polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche).

si racconta che Jean Bernoulli addirittura scacciò di casa il proprio figlio perché aveva vinto un premio in un concorso dell'Accademia Francese delle Scienze a cui anche lui aveva partecipato!

Anche fuori della famiglia i Bernoulli erano facili ad offendere e a sentirsi offesi: spesso alimentavano le dispute in modo alquanto esagerato e scorbutico. Nella disputa tra Leibniz e Newton sulla paternità del calcolo differenziale[9], i fratelli Bernoulli si schierarono col loro maestro Leibniz senza risparmiare insulti al suo rivale.

4.2.4 *Lemniscata di Bernoulli*

Un'altra della curve più amate da Jacob, è la *lemniscata*:

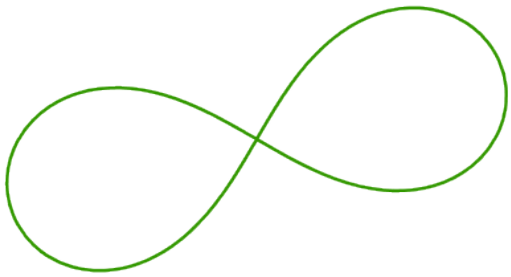


Figura 5: Lemniscata di Bernoulli

Jacob pubblicò i suoi studi sulla lemniscata negli *Acta Eruditorum* nell'anno 1694. Jacob la descriveva come una figura simile ad un otto o a un nastro annodato (appunto dal latino abbiamo *lemniscus*)). La sua equazione in coordinate polari[10] é:

$$r^2 = a\cos(2\theta) \tag{5}$$

4.2.5 *La più amata da Jacob*

Non era una donna, bensì un'altra curva! Sicuramente fu quella che più di tutte stimolò la sua immaginazione: si tratta della *spirale logaritmica*. L'amor era tale che Jacob chiese di farsela incidere sulla tomba, seguita dalla scritta:

---

9 Leibniz aveva avuto una corrispondenza con Newton nel 1677, nella quale si erano scambiati, in maniera più o meno chiara, i principi da ciascuno elaborati sul calcolo infinitesimale. Successivamente Leibniz andò in Inghilterra, dove alcuni matematici inglesi lo accusarono di aver copiato la teoria da Newton e di averla diffusa in Europa come propria. Quest'equivoco forse nacque dal fatto che Newton era molto restio a pubblicare i suoi lavoro, mentre Leibniz era più aperto a mantenere fitte corrispondenze e a pubblicare i propri risultati.

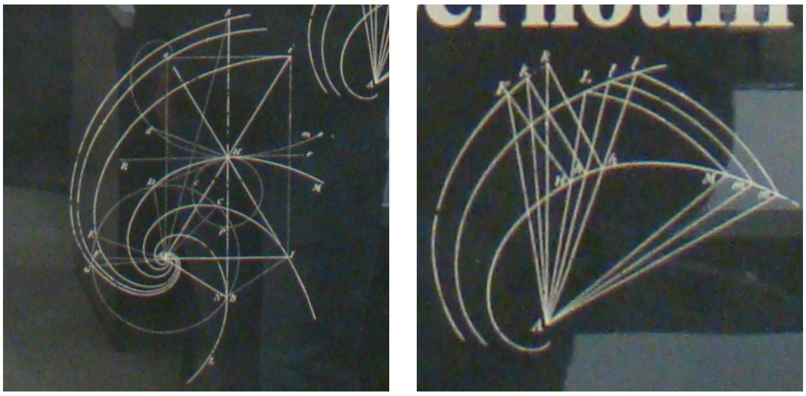
10 Sono quelle coordinate che per individuare un punto in un piano non utilizzano, come le cartesiane, un'ascissa e un'ordinata, ma utilizzano l'angolo θ con l'asse delle ascisse e la distanza R dall'origine.

«*Eadem mutato resurgo*»
(Pur attraverso trasformazioni, rinasco sempre la stessa)

Perché questa scritta? Nel trattato che intitolò *Spira mirabilis* (spirale meravigliosa) Jacob descrisse parecchie proprietà notevoli, che non erano mai state precedentemente osservate[11]: *Eadem mutato resurgo* stava ad indicare la stupefacente proprietà della curva: se si prova a costruire un'altra curva a partire dalla spirale logaritmica si ottiene sempre una spirale logaritmica[12]. Questa proprietà è nota anche come «autosomiglianza». Jacob scrisse a proposito:

> «Si può usarla come simbolo sia della forza e costanza nelle avversità, sia del corpo umano che, dopo tutti i cambiamenti, e perfino dopo la morte, è restituito al suo preciso e perfetto Sé»

La casa editrice che ha realizzato il poster di Jacob, ha ben pensato di aggiungere in basso a destra due disegni della spirale logaritmica rappresentando le trasformazioni osservata da Jacob che la fanno "rinascere":



(a) (b)

Figura 6: Proprietà della spirale logaritmica scoperte Jacob (vedasi nota 12). La casa editrice *Birkhäuser* ha messo in un unico ritratto Jacob e la sua innamorata preferita.

Da oggi, per alcuni frequentatori della sala della biblioteca, svanisce il mistero di quei disegni a primo impatto spaventosi e criptici. Chissà quante volte, a vederli con lo sfondo del severo e autoritario

11 Prima di Jacob, Cartesio e Torricelli si dedicarono allo studio della curva.

12 L'evoluta di una spirale logaritmica è una spirale logaritmica; la curva podale di una spirale logaritmica rispetto al suo polo (ossia, il luogo delle proiezioni del polo sulle tangenti alla curva data) è una spirale logaritmica uguale; la caustica formata dalla riflessione dei raggi che escono dal polo (ossia, l'inviluppo dei raggi riflessi in punti della curva data) è una spirale logaritmica uguale; la caustica formata dalla rifrazione dei raggi che escono dal polo (ossia, l'inviluppo dei raggi rifratti in punti della curva) è una spirale logaritmica uguale.

(o meglio *autorevole*) Jacob, abbiamo pensato «chissà quale mostruoso teorema si cela dietro queste curve! *U Signuri mi ni scansi!*» ed invece si tratta di proprietà che possiamo riscoprire con carta, penna, righello e compasso. Ora sappiamo che si tratta di una foto d'amore: l'amore tra Jacob e la sua bellissima spirale logaritmica.

Quando dico bellissima, lo credo anch'io che lo sia. Anche natura sembra che scelga tale curva, infatti è possibile osservare la spirale logaritmica nel mollusco chiamato *nautilus*:

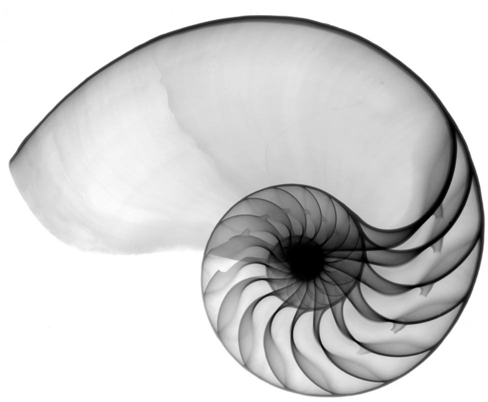


Figura 7: Il mollusco nautilus ha gli stessi gusti di Jacob Bernoulli.

La spirale logaritmica presenta altre sorprese legate alla famosa successione di Fibonacci, che si costruisce ponendo il primo e il secondo termine uguali ad uno e i successivi sommando i due precedenti:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad \dots \quad a_n \cdot a_{n-1} \quad \dots \tag{6}$$

Accostando due quadrati di lato uno, con un altro di lato due e poi a sua volta con un quadrato di lato tre e così via, si ottiene una spirale logaritmica congiungendo i vertici con un compasso, così come mostrato nella seguente figura:

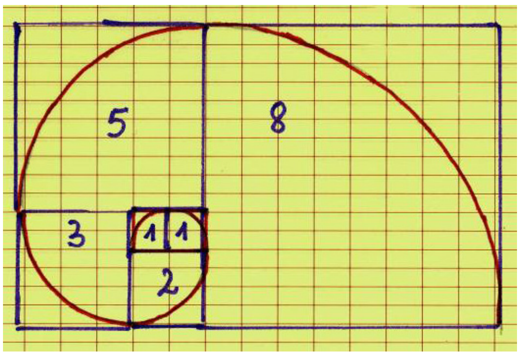


Figura 8: Uno dei metodi di costruzione della curva più amata da Jacob.

A sua volta sappiamo che i numeri di Fibonacci sono strettamente legati al *rapporto aureo* (detto anche sezione aurea, numero aureo, costante di Fidia o proporzione divina), che indica il rapporto fra due lunghezze disuguali, la cui maggiore è *medio proporzionale* tra la minore e la somma delle due. In formule, se A è la lunghezza maggiore e B quella minore:

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} \tag{7}$$

Se poniamo $\phi = A/B$:

$$\frac{A}{B} = \frac{A+B}{A} = 1 + \frac{B}{A} \quad \Longrightarrow \quad \phi = 1 + \phi^{-1} \tag{8}$$

Da cui si ottiene l'equazione $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, le cui soluzioni (irrazionali) sono:

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656\ldots \tag{9}$$

$$\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0,6180339887498948482045868343656\ldots \tag{10}$$

Essendo A la maggiore di B, il rapporto cercato è il primo, ovvero ϕ_1, tuttavia notiamo con curiosità che la seconda soluzione mantiene la medesima parte decimale!

Come son legati i numeri di Fibonacci con la sezione aurea? Se consideriamo la successione di Fibonacci e facciamo il rapporto tra un termine e il precedente otteniamo una nuova successione che al crescere dell'indice n approssima sempre più il rapporto aureo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1 \\ \frac{3}{2} &= 1.5 \\ \frac{5}{3} &= 1.666666\ldots \\ \frac{8}{5} &= 1.6 \\ \frac{13}{8} &= 1.625 \\ &\ldots \\ &\frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Cioè si può dimostrare, ricorrendo al concetto di limite, che per n che tende a «più infinito» abbiamo:

$$\lim_{n \to +\infty} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi = 1,6180339887498948482045868343656\ldots \quad (12)$$

Continuando a giocare con la spirale logaritmica, numeri di Fibonacci e rapporto aureo, si potrebbero dimostrare un'infinità di proprietà curiose e inaspettate, dietro le quali riappare sempre bellezza e armonia. Proprio come Jacob attribuiva alla sua amata curva, abbiamo che *Eadem mutato resurgo*.

4.3 JACOB E LA TEORIA DELLA PROBABILITÀ

4.3.1 *La formula di Bernoulli*

La prima volta che sentì il nome di Bernoulli, fu al quarto superiore e dalla voce della mia cara professoressa di probabilità e statistica Maria Finocchiaro. Lei, con la pazienza di una santa, tentava di spiegarci la seguente formula:

$$P = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (13)$$

che si chiama appunto *formula di Bernoulli*. Tale formula si applica a tutti quegli esperimenti di probabilità che possono avere solo due possibili risultati (*successo* o *insuccesso*) in n prove. Un esperimento di tale tipo può essere il seguente:

> «In biblioteca ci sono 10 cornici di matematici: 8 sono maschi e 2 sono femmine. Un giorno decidono (finalmente) ripitturare le pareti della biblioteca e le cornici vengono riposte in un angolo in un ordine sconosciuto.
> A pittura ultimata, il Signor Giuseppe Librando[13] prende a caso tre cornici: *qual è la probabilità che tra le tre cornici ci siano i due matematici di sesso femminile?*»

Per prima cosa calcoliamo la probabilità di successo p, ovvero la probabilità di pescare un matematico femmina: abbiamo 2 femmine su 10 cornici, pertanto:

$$p = \frac{2}{10} = 0,2 \quad \text{probabilità di successo} \quad (14)$$

In x cosa mettiamo? Mettiamo il numero di successi che desideriamo ovvero due femmine:

$$x = 2 \quad (15)$$

13 È davvero magico che il nostro responsabile della sala della biblioteca vada di cognome «*Librando*».

Ed n che cos'è? Sono il numero di prove: il Signor Librando ha preso tre cornici, pertanto:

$$n = 3 \tag{16}$$

A questo punto abbiamo tutti i valori da inserire nella formula di Bernoulli, tuttavia rimane da capire cosa diavolo sia:

$$\binom{n}{x} = \text{che è sta roba?} \tag{17}$$

Lungi dal dimostrare perché, tale affare, che potrebbe essere scambiato per una frazione o una matrice di due righe e una colonna, sta ad indicare quello che si chiama *coefficiente binomiale*. È chiamato binomiale perché permette di calcolare i coefficienti dello sviluppo di un binomio di qualsiasi grado, ovvero di $(a+b)^n$ per un n qualunque.

Nella teoria della probabilità, ma più precisamente nel *calcolo combinatorio*, il coefficiente binomiale permette di conoscere, prendendo x oggetti a caso da n oggetti, quante combinazioni posso ottenere. Cioè, se in biblioteca abbiamo 70.000 libri[14] e io ne prendo 500 a caso tra questi, ho un modo di calcolare quante possibili combinazioni posso ottenere.

Nel caso del Signor Librando, lui ha preso tre cornici e ora vogliamo che due di queste abbiano una certa proprietà. In tutto ciò il coefficiente binomiale rapprensenta il sottoproblema:

> «Ho tre cornici diverse. Se le prendo a due a due, quante combinazioni possibili ho?»

Per numeri così piccoli, possiamo scoprirlo anche da soli: abbiamo la cornice 1, la cornice 2 e la cornice 3, per brevità Q1, Q2, Q3. Se ne prendo due posso ritrovarmi con la prima e la seconda (Q1-Q2), con la prima e la terza (Q1-Q3) oppure con la seconda e la terza (Q2-Q3): in totale abbiamo tre combinazioni. Quindi senza andare a vedere come si calcola il coefficiente binomiale, sicuramente ci aspettiamo che sia uguale a tre per $n = 3$ e $x = 2$:

$$\binom{n}{x} \overset{\substack{n=3\\x=2}}{=} \binom{3}{2} = 3 \tag{18}$$

Ovviamente, se avessimo a che fare con numeri più grandi mica possiamo metterci a scrivere tutte le combinazioni possibili e poi contarle. Pertanto ricorriamo alla versione esplicita del coefficiente binomiale, che si dimostra è pari a:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{19}$$

14 La nostra biblioteca possiede un patrimonio librario di circa 70.000 volumi, comprensivo di 900 testate di riviste di cui oltre 500 attivate da abbonamenti e cambi con la rivista "Le Matematiche" edita e pubblicata dallo stesso dipartimento.

dove il punto esclamativo indica il *fattoriale* del numero che lo precede, ovvero la moltiplicazione di quel numero per tutti gli interi che lo precedono:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (20)$$

Ovviamente la presenza o no dell'uno finale non comporta alcuna differenza, però scritto con l'uno è più bello: fa pensare al fatto che tutte le quantità potrebbero essere pensate come moltiplicate da un'infinità di uno, eppure sempre quelle sono[15].

Ritornando al problema delle cornici e quindi alla formula di Bernoulli, abbiamo, in conclusione, che la probabilità è:

$$P = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \overset{\substack{p=0,3 \\ n=3 \\ x=2}}{=} 3 \cdot (0,3)^2 \cdot (0,7)^1 = 0,189 \qquad (21)$$

Cioè abbiamo $0,189 \cdot 100 = 18,9\%$ di probabilità che il Signor Librando si ritrovi con due belle donzelle e un maschietto!

4.3.2 *Il teorema di Bernoulli o "legge dei grandi numeri"*

Da quanto abbiamo appena visto, Jacob si occupò anche di teoria della probabilità. Jacob scrisse un trattato, poi divenuto classico, dal titolo *Ars conjectandi* (l'arte di congetturare) che venne però pubblicato postumo nel 1713, otto anni dopo la morte dell'autore.


JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xIII.

Figura 9: *Ars conjectandi* è uno scritto postumo di Jacob. Può essere considerato il primo importante trattato sulla teoria della probabilità.

15 L'«1» viene appunto chiamato l'elemento neutro della moltiplicazione.

Tale trattato può essere considerato il primo volume importante sulla teoria della probabilità[16], infatti contiene il famoso teorema che oggi nome dell'autore o chiamata anche "legge dei grandi numeri". Cosa dice tale legge? L'enunciato formale non è di comprensione immediata e credo farebbe impallidire alcuni lettori:

> Se p è la probabilità di un evento, ed x è il numero di volte in cui l'evento di verifica in n prove, se ϵ è un numero positivo piccolo a piacere, e se P è la probabilità che sia soddisfatta la disuguaglianza:
>
> $$\left|\frac{x}{n} - p\right| < \epsilon \tag{22}$$
>
> allora abbiamo che:
>
> $$\lim_{n \to \infty} P = 1 \tag{23}$$

Il mio amico Dino mi direbbe: «*Parra comi mangi!*». Da quanto c'ho capito io[17], tale teorema può essere considerato un ponte di collegamento tra la teoria della probabilità (ovvero, tramite leggi teoriche calcolo la probabilità di un evento) e la statistica (vedo quante volte si è verificato un evento e calcolo la probabilità che si verificherà ancora).

Un esempio che può farci capire la legge di Bernoulli è la verifica di una moneta o un dato truccato. Se lanciamo una moneta non truccata, la teoria della probabilità ci dice che abbiamo 1/2 di probabilità che esca testa e 1/2 di probabilità che esca croce. Ma di fatto, nei nostri giochi, potremmo incontrare un baro con la moneta truccata. Come facciamo a non farci fregare? Con infiniti lanci! Ecco, già s'intuisce il perché la chiamano "legge dei grandi numeri". Ora, dato che siamo impossibilitati a fare infiniti lanci, noi ci accontentiamo di un *gran numero di lanci*: non avremo la certezza assoluta, ma otterremo una buona probabilità di azzeccare.

Quindi prendiamo la moneta e lanciamola 100 volte: se alla fine di questi numerosi lanci circa metà delle volte è uscita testa, molto probabilmente la moneta non è truccata. Possiamo ulteriormente affinare l'esperimento facendo un numero di lanci ancora maggiore.

Ipotizziamo che in 100 lanci, 72 volte si è presentata testa e 28 croce: già possiamo cominciare a sospettare che la moneta sia truccata. Aumentiamo il numero delle prove, facciamo 1000 lanci: se esce 740 volte testa e 260 volte esce croce possiamo dire che con un'alta probabilità la moneta è truccata!

16 Prima di Bernoulli, Huygens scrisse *De ludo aleae*. Il trattato di Huygens può essere considerato una breve introduzione alla teoria della probabilità rispetto al lavoro di Bernoulli.

17 Ma infatti credo di non averla capita, oppure ho capito qualcosa che ci assomiglia: a quanto pare su questa legge ci sono dei fraintendimenti di tipo concettuale, fattomi notare per la prima volta dal Prof. Giovanni Fiorito durante un suo seminario sulla teoria di probabilità. Da quel giorno non so più cosa sia esattamente la legge dei grandi numeri.

4.4 E IL NUMERI, L'EQUAZIONE E LA DISUGUAGLIANZA?

Quasi per ogni matematico importante si può trovare il suo *numero* (o *numeri*), la sua *formula*, la sua *equazione*, la sua *disuguaglianza* e il suo *teorema*. Del nostro caro Jacob abbiamo visto il teorema e la formula. Per completezza e per onorare il lavoro di Jacob, in questa sezione verranno discusse informalmente l'equazione, la disuguaglianza e i numeri di Jacob.

È altamente probabile che i lettori non particolarmente amanti della matematica di sentiranno male.

4.4.1 *L'equazione di Bernoulli*

A farmi conoscere l'*equazione di Bernoulli* fu la mia cara professoressa di matematica Filippa Zappalà al quinto anno delle scuole superiori. Eravamo nel laboratorio di matematica. Era bello andare al laboratorio: quei computers erano la nostra felicità, poiché ci si divertiva maggiormente ad usare Excel e Derive per verificare la correttezza degli esercizi. Ognuno di noi aveva un account privato e una cartella sul server in cui potevamo mettere i nostri files (fino ad un massimo di 50 Mbyte!). Quando permesso, avevamo accesso ad Internet per fare le nostre ricerche[18]. Quel giorno, nonostante fossimo al laboratorio, usammo la prima mezz'ora per fare passi avanti con il programma: in quel periodo la Professoressa Zappalà tentava di spiegare a noi analfabeti le *equazioni differenziali*. Spegnemmo tristemente i computers e facemmo un momentaneo ritorno alla carta e penna. La cara Professoressa ci spiegò come risolvere l'equazione di Bernoulli, che è appunto un'equazione di tipo differenziale:

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \tag{24}$$

Cos'è un'equazione differenziale? Oggi, dopo tre corsi di analisi matematica e altrettanti di fisica, intendo per equazione differenziale quell'*equazione che lega una funzione "incognita" con le sue derivate*[19]. Cioè noi abbiamo un problema, questo problema consiste nel trovare una funzione che non sappiamo qual è, però sappiamo la relazione che sussiste tra lei e le sue derivate: quella che otteniamo è un'equazione (detta differenziale) che in alcuni casi può essere completamente risolta.

18 E non solo...

19 Non è mia intenzione scrivere un manuale di analisi, però, per rendere l'idea, la derivata di una funzione è, nei casi fortunati, un'altra funzione che possiamo costruire a partire dalla prima. Essa ci permette di ricavare informazioni importanti sulla funzione da cui è stata "derivata": ad esempio quando è crescente o descrescente, oppure i valori di massimo e di minimo (se ci sono). Sempre se si è fortunati, si può reiterare il procedimento calcolando la derivata della derivata, ottenendo la *derivata seconda*, e così via la *derivata terza, quarta, . . .*

APPUNTI PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \quad (**)$$

1) Occorre innanzi tutto risolvere **l'omogenea associata**: $y'' + p y' + q = 0$ (*).

Per fare ciò, si risolve l'**equazione caratteristica** : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

Questa può avere:

a) $\Delta > 0 \rightarrow$ due radici reali e distinte $\lambda 1$ e $\lambda 2$; in questo caso **l'integrale generale** dell'eq. (*) dato da:

$y = c1\, e^{\lambda 1 x} + c2\, e^{\lambda 2 x}$

b) $\Delta = 0 \rightarrow$ due radici reali **coincidenti** λ; in questo caso **l'integrale generale** dell'eq. (*) è dato da:

$$y = (c1 + c2\, x)e^{\lambda x}$$

c) $\Delta < 0 \rightarrow$ due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$; in questo caso **l'integrale generale** dell'eq. (*) è dato da:

$y = e^{\alpha x}(c1 \cos \beta x + c2 \operatorname{sen} \beta x)$

2) ora bisogna trovare un integrale particolare della non omogenea, da sommare all'integrale generale dell'omogenea trovato prima. Per fare ciò, occorre distinguere i casi particolari che si possono presentare:

$f(x)=a0x^n+a1x^{n-1}+\ldots+an$ polinomio di grado n	$f(x)=P(x)e^{\alpha x}$ P(x) polinomio digrado n	$f(x)=P(x)e^{\alpha x}+Q(x)\, e^{\beta x}$	$f(x)=P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$
Se $q \neq 0$ si pone $\varphi(x)=$ polinomio di grado n	Se **α non è soluzione** dell'eq caratteristica, si pone $\varphi(x)=(a0x^n+a1x^{n-1}+\ldots+an)\, e^{\alpha x}$	Si risolvono separatamente le due eq. $y''+py'+q= P(x)e^{\alpha x}$ $y''+py'+q=Q(x)\, e^{\beta x}$ poi si applica il **principio di sovrapposizione delle soluzioni**	Se $\alpha + i\beta$ **non è soluzione** dell'eq caratteristica, si pone $\varphi(x)=A(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + B(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ con A(x) e B(x) polinomi di grado non superiore al più grande fra quelli di P(x) e Q(x)
Se $q = 0$ si pone $\varphi(x) =$ polinomio di grado n+1	Se **α è soluzione** dell'eq caratteristica, si pone $\varphi(x)= x\,(a0x^n+a1x^{n-1}+\ldots+an)e^{\alpha x}$ (se α è sol. Doppia, si mette x^2)		Se $\alpha + i\beta$ **è soluzione** dell'eq caratteristica, si pone $\varphi(x)= x\, [\, A(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + B(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x]$

3) a questo punto si calcolano le derivate prima e seconda della $\varphi(x)$ e si sostituiscono nell'eq. data al posto di y, y',y''. Poiché il primo e il secondo membro devono essere identici, si otterrà un sistema che ci darà le soluzioni cercate.

Principio di sovrapposizione delle soluzioni:

Se il secondo membro dell'eq. (**) è la somma di più funzioni, allora è possibile risolvere tante eq. quanti sono gli addendi e poi sommare gli integrali ottenuti.

Prof. Filippa Zappalà

Figura 10: Un caro ricordo delle scuole superiori: un prezioso schema realizzato dalla mia cara Professoressa Filippa Zappalà per aiutare noi studenti della VBI.

In realtà, già ai tempi delle scuole superiori sapevo la frasetta «relazione che lega una funzione incognita alle sue derivate», tuttavia, tanto ero poco abituato al concetto di derivata, che preferivo pensare le equazioni differenziali facendone un analogo con le rassicuranti equazioni algebriche da scuola media. Mi dicevo (sbagliando): «*un'equazione differenziale è un'equazione dove l'incognita non è più un numero, ma una funzione.*».

Prima di allora, data un'equazione mi si chiedeva di scoprire qual era il numero che la rendeva vera, ad esempio $x = 5$ oppure $x = \sqrt{2}$.

Invece, per quel *nuovo* tipo di equazioni dovevo scoprire se la soluzione era una *parabola*, una *retta*, un'*esponenziale*, una combinazione di *seni* e *coseni* oppure chissà quale altra funzione!

Sebbene fosse un modo impreciso per definire un'equazione differenziale (si confonderebbe con quella che si chiama *equazione funzionale*), a distanza di tempo mi rendo conto che quella *metafora* è oggi un buon modo per fornire al profano una mezza idea di cosa sia un'equazione differenziale senza andare a scomodare concetti fini come *derivate* e *limiti*, sebbene siano davvero centrali. Quindi al profano direi: *un'equazione differenziale puoi vederla come un'equazione che invece di avere per incognite numeri, ha per incognite funzioni tipo parabole, rette, esponenziali, seni e coseni.*

Uno studente universitario incontra la prima volta un'equazione differenziale nei primi corsi di fisica[20], ad esempio nello studio del moto di una particella puntiforme. In questi studi, solitamente, si denomina con $x(t)$ la posizione della particella nel tempo, con $v(t)$ la sua velocità nel tempo e con $a(t)$ la sua accelerazione nel tempo. Uno studio *tipico* è quello del moto uniformemente accelerato. In tale moto, l'accelerazione è costante nel tempo (cioè più tempo passa, più il corpo aumenta la sua velocità):

$$a(t) = g \quad \text{(accelerazione gravitazionale } g = 9.8\,\text{m/s}^2 \text{ sulla Terra)} \tag{25}$$

sappiamo che l'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo, quindi possiamo scrivere l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}v(t) = a(t) \tag{26}$$

dalla quale vorremmo ricavare l'espressione esplicita di $v(t)$. Un'equazione di tale tipo prende il nome di *equazione differenziale a variabili separabili*, la quale può essere risolta nel seguente modo (per i non amanti delle formule si consiglia si saltare direttamente alla 32):

- moltiplico ambo i membri per dt:

$$d\,v(t) = a(t)\,dt \tag{27}$$

- essendo l'accelerazione costante $a(t) = g$ sostituendo:

$$d\,v(t) = g\,dt \tag{28}$$

- integriamo il membro a destra dalla velocità iniziale v_0 ad una velocità $v(t)$ e il membro a sinistra dal tempo iniziale t_0 ad un tempo t:

$$\int_{v_0}^{v(t)} d\,v(t) = \int_{t_0}^{t} g\,dt \tag{29}$$

20 Uno studente dovrebbe incontrare per la prima volta un'equazione differenziale durante le lezioni di Analisi Matematica, tuttavia è curioso notare che in molti corsi di laurea si hanno nello stesso semestre Analisi 1 e Fisica 1, dove l'ultimo argomento dell'una è propedeutico per il primo argomento dall'altra.

e otteniamo:

$$v(t) - v_0 = (t - t_0)g \tag{30}$$

- esplicitando rispetto a $v(t)$:

$$v(t) = v_0 + (t - t_0)g \tag{31}$$

- supponendo velocità iniziale nulla ($v_0 = 0$) e tempo iniziale nullo ($t_0 = 0$) otteniamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$$v(t) = g\,t \tag{32}$$

Come ci aspettavamo, la velocità aumenta nel tempo in modo proporzionale alla costante g.

Tramite un esempio dal mondo della Fisica, abbiamo mostrato che dalla relazione *differenziale* tra accelerazione e velocità, è possibile ricavare l'espressione della velocità.

Ritornando all'equazione di Bernoulli $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$, possiamo dire che l'incognita è la funzione y mentre sono note le funzioni $P(x)$, $Q(x)$ e il valore n.

Jacob fu il primo a trovare un metodo di risoluzione di tale equazione, anche se altri metodi furono trovati dal fratello Jean e da Leibniz (per chi volesse vedere un metodo di risoluzione dell'equazione di Bernoulli può consultare l'appendice A.1).

Di equazione di Bernoulli ce n'è un'altra, ma questa è da attribuire al nipote Daniel Bernoulli: è un'equazione di fluidodinamica. Tale equazione fornisce un modello semplificato per descrivere il flusso di un fluido non viscoso. Per non confondere le due equazioni spesso conviene riferirsi all'equazione di Jacob come l'*equazione differenziale di Bernoulli*.

4.4.2 *La disuguaglianza di Bernoulli*

In questo paragrafo ci limitiamo solo a mostrare la disuguaglianza di Bernoulli e senza dimostrarla[21]. Ho deciso d'inserirla al solo scopo di onorare anche quest'altro risultato di Jacob. La sua disuguaglianza afferma che:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \tag{33}$$

per ogni intero $n \geqslant 0$ e ogni numero reale $x \geqslant -1$. La disuguaglianza di Bernoulli è un passo cruciale nella dimostrazione di altre disuguaglianze.

---

21 Si può dimostrare facilmente con quello che è chiamato *principio di induzione*. Vedasi l'appendice A.2.

4.4.3 *I numeri di Bernoulli*

Durante la mia carriera universitaria da fuoricorso perenne, non ho mai incontrato i numeri di Bernoulli: non ho mai saputo cosa siano. Nessun problema, perché siamo in biblioteca! Vige la regola:

> *Non sai una cosa? Cerca qualche libro che ne parli!*

Quindi sono andato nel computer posto all'ingresso e ho digitato «Bernoulli» nel motore di ricerca del catalogo unico delle biblioteche d'ateneo:

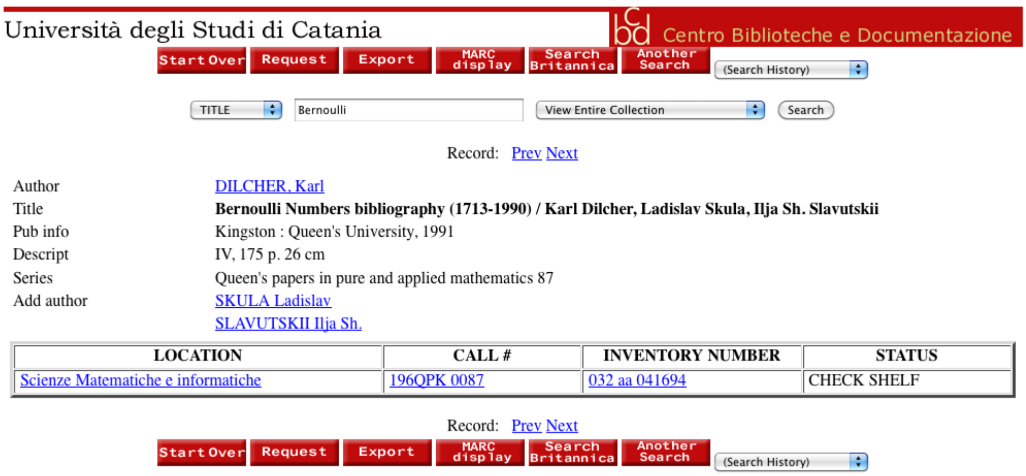


Figura 11: Nel computer della biblioteca troviamo sempre aperta la pagina `http://millennium.sida.unict.it/search/`.

L'unico libro che conteneva nel titolo la parola «Bernoulli» era proprio sui numeri di Bernoulli. Si chiamava *Bernoulli Numbers bibliography* curata da *Karl Dilcher*, *Ladislav Skula* e *Ilja Sh. Slavutskii*, tizi a me sconosciuti. Soffermandomi sul primo, sembra che Karl Dilcher sia professore di matematica alla *Dalhousie University* del Canada. Dalla sua pagina (`http://www.mathstat.dal.ca/~dilcher/`) si legge che i «misteriosi» numeri di Bernoulli sono un suo ambito di ricerca.

Allo sportello della biblioteca c'era la simpatica Signora Concetta. Mi feci dare un modulo di consultazione e lo compilai col titolo, autore, numero di collocazione dell'opera, mio numero di matricola e firma. Immediatamente la Signora Concetta si lanciò alla ricerca del volume. In meno di due minuti tornò e mi disse che il libro era fuori, probabilmente preso in prestito da qualche professore[22]. La signora Concetta mi disse di ripassare l'indomani mattina.

L'indomani mattina ebbi finalmente tra le mani il desiderato volume:

22 Chissà qual è questo Professore che si interessa ai numeri di Bernoulli!

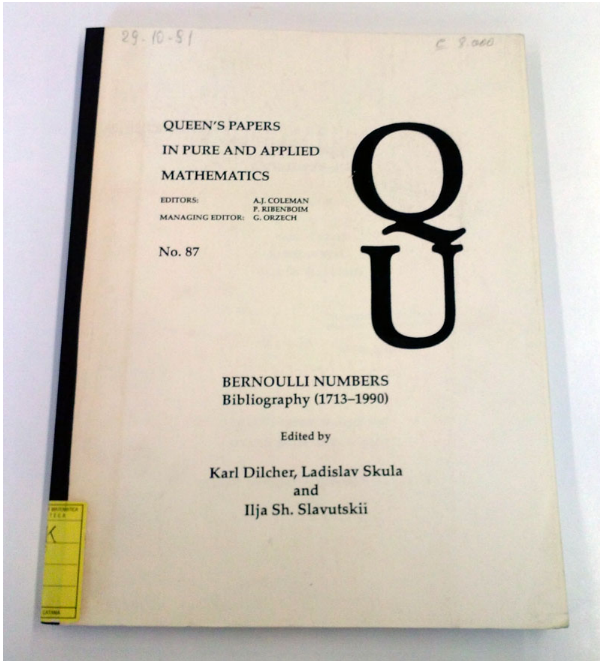


Figura 12: Bibliografia sui numeri di Bernoulli.

Il libro era ovviamente in inglese e in realtà non conteneva neanche un numero di Bernoulli. Come anticipava il titolo, si trattava di una bibliografia con tutti gli articoli matematici sui numeri di Bernoulli pubblicati e conosciuti fino al Giugno 1991. Rimasi meravigliato al notare l'incredibile vastità di articoli su tale argomento. Chissà quanto crescerebbe il volume se si contassero anche gli articoli scritti dal 1991 a ora!

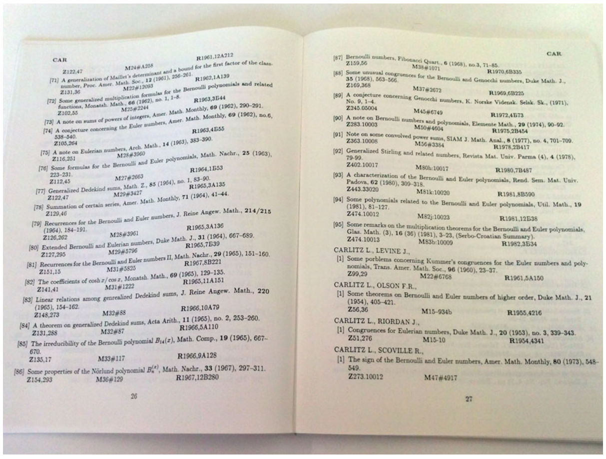


Figura 13: Centinaia di articoli sui numeri di Bernoulli, ma neanche un numero di Bernoulli.

È naturale chiedersi il perché di una così nutrita ricerca sui numeri di Bernoulli. S'intuisce che tali numeri siano importanti e abbiano significative applicazioni.

In effetti è proprio così: consultando il *Boyer*, si scopre che i numeri di Bernoulli fanno parte di una formula ricorsiva, scoperta dallo stesso Bernoulli, per calcolare la somma delle potenze di n numeri interi interi elevati alla c:

$$0^c + 1^c + 2^c + 3^c + 4^c + \cdots + n^c = ? \tag{34}$$

Jacob fu il primo a trovare un metodo generale che lui descrisse tramite la formula:

$$\begin{aligned} \int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B n^{c-3} + \\ + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C n^{c-5} + \dots \end{aligned} \tag{35}$$

Dove i numeri A, B e C sono i primi tre numeri di Bernoulli. Evidentemente i numeri di Bernoulli non sono immediatamente accessibili a chi non mastica un po' di matematica. Simpaticamente *Boyer* scrive: «È facile verificare che i primi tre numeri sono $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{30}$ e $C = \frac{1}{42}$» e non saprei confermare se è così perché non ho provato a calcolarli!

Si sa che i numeri di Bernoulli sono utili per scrivere gli sviluppi in serie di funzioni trigonometriche e iperboliche, sono inoltre utilizzati per esprimere certi valori della funzione zeta di Riemann: quest'ultima è legata al più famoso problema irrisolto della matematica, ovvero *ipotesi di Riemann*. Forse per tale motivo vi sono tutte queste ricerche sui numeri di Bernoulli[23].

23 E forse anche perché sulla dimostrazione dell'ipotesi di Riemann vi è in palio un milione di dollari! Tuttavia sembra che una grande fetta dei matematici ambisca più all'immortalità guadagnata risolvendo un problema famoso che al milione di dollari.