Su Francesco Guglielmino

Giuseppe Caruso

14 giugno 2016

Indice

1 Alla ricerca del Francesco Guglielmino che è in noi

Prima di ricominciare con i soliti post sul gruppo *Biblioteca di matematica*, vorrei dedicare un attimo del mio tempo alla figura dell'emerito Prof. Francesco Guglielmino, scomparso nel 2013 e il cui nome oggi titola la nostra amata biblioteca, diventando così *Biblioteca di matematica Francesco Guglielmino.*

Chi è Francesco Guglielmino? Molti di noi non l'hanno conosciuto e apparentemente la sua vita e i suoi lavori potrebbero sembrare distanti da ciò che siamo e di cui ci occupiamo.

Non voglio riportare fatti importanti o aneddoti sulla vita del Professore, poiché lo ha già fatto divinamente il suo allievo Prof. Mario Marino con i suoi articoli - che vi invito a leggere - visionabili ai links:

- `http://www.gioenia.unict.it/bollettino/bollettino2013/specialFocusEdition/marino.pdf`
- `http://www.gioenia.unict.it/bollettino/bollettino2014/full_papers/CommemorazioneGuglielmino.pdf`

È inutile dire che nessuno meglio di suo un allievo può raccontare la vita di Francesco Guglielmino, pertanto io non dirò quasi nulla in proposito. Mi limiterò solo a far notare quelli che possono essere i collegamenti tra noi studenti e il Prof. Francesco Guglielmino.

La prima cosa che si potrebbe notare è ch'Egli è stato professore di coloro che poi sono diventati i nostri professori di analisi matematica, tra cui Orazio Arena, Giovanni Fiorito, Michele Frasca, Mario Marino, Antonino Maugeri, Francesco Nicolosi, Giuseppe Pulvirenti, Lorenzo Tuccari e di Filippo Chiarenza (1951-1996), pertanto chi di noi sia stato loro allievo ha ereditato inconsapevolmente un ≪pezzettino≫ del Prof. Francesco Guglielmino. Quel che proverò a fare è descrivere quel ≪pezzettino≫ che è giunto a me e ai miei colleghi.

Nei primi due anni del mio corso di laurea, io e i miei colleghi seguimmo le lezioni di analisi matematica 2 e 3 proprio con uno degli allievi di Franscesco Guglielmino, ovvero il Prof. Michele Frasca.

Il Prof. M. Frasca - oltre ad averci mostrato che significhi padroneggiare l'analisi matematica e aver colorato densamente le bianche tele che eravamo (fino a perforarci) - c'insegnò una bellissima tecnica per risolvere gli integrali.

In seguito scoprì - sempre grazie al Prof. Mario Marino - che quella tecnica di integrazione è stata l'oggetto della tesi di laurea del Prof. Franscesco Guglielmino, dissertata nell'anno accademico 1949-50. La tesi aveva il titolo: ≪Calcolo di alcuni integrali singolari mediante il teorema dei residui≫.

2 Il bel teorema dei residui

Già dalle prime lezioni di analisi complessa io e i miei colleghi percepimmo di andare incontro a qualcosa di completamente nuovo e inaspettato. Più delle volte abbiamo creduto di essere ubriachi, ma lo stesso Prof. M. Frasca credo avesse una dote innata nell'ubriacarci. Finché si trattava di estrarre le radici quadrate di quantità negative, era un fatto a cui eravamo abbastanza preparati fin dalle scuole superiori quando ci dicevano delle ≪*soluzioni complesse e coniugate*≫ delle equazioni di secondo grado. Ma altre cose *strane* che avvenivano nel dominio dei complessi non ce le aspettavamo proprio, come poter calcolare i logaritmi di quantità negative oppure che il modulo di un coseno potesse essere maggiore di uno.

Nel dominio complesso l'analisi matematica sembrava tutt'altra cosa: cose che prima erano schiacciate nella retta reale ora avevano la libertà di muoversi in un piano, producendo disegni a sostegno dell'immaginazione. Fare una potenza significava disegnare un poligono, così come una serie di potenze convergente diventava una spirale sul piano!

Lo stile di queste novità si fece sentire anche nelle tecniche di integrazione, alcune delle quali basate sull'utilizzo del teorema di residui, trattato dal giovane Francesco Guglielmino nella sua tesi di laurea.

2.1 Un giretto fuori dalla retta reale

Solitamente, lavorare nel dominio complesso permette di risolvere più agevolmente problemi del dominio reale. Infatti, una buona parte dei metodi matematici appresi *durante* le lezioni di analisi complessa si basavano sul principio di trasformare un problema formulato nell'insieme dei reali ($\mathbb{R}$) in un problema dell'insieme dei complessi ($\mathbb{C}$), fare alcune agevoli operazioni in questo mondo ≪*immaginario*≫ e poi ritornare nel mondo dei numeri reali, ottenendo *come per magia* una soluzione al problema iniziale: l'applicazione del teorema dei residui sfrutta il medesimo principio.

Fin dalle scuole superiori siamo abituati a calcolare gli integrali definiti, quindi a calcolare l'area sottesa da una curva in un preciso intervallo della retta reale. A introdurmi a queste cose fu la mia cara Professoressa Zappalà Filippa, al quarto superiore, che non posso fare a meno di ricordare. Quando la Prof.ssa

Zappalà ci spiegò la classica tecnica di integrazione con la ricerca della primitiva, ci disse una frase che mi rimase impressa:

> ≪*Ragazzi, la maggior parte delle funzioni conosciute non sono integrabili oppure non esiste un modo di calcolare la primitiva! Noi stiamo facendo solo quelle si possono calcolare!*≫

Noi, che a quei tempi eravamo *primati* su due gambe, erano più che sufficienti quelli *calcolabili* per sbatterci la testa nei muri dell'istituto.

Un giorno la Prof.ssa Zappalà ci mostrò lo svolgimento del seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx \tag{1}$$

la ricerca della primitiva era abbastanza laboriosa perché richiedeva la scomposizione dell'integrando in funzioni che sapevamo integrare e i passaggi per raggiungere la forma desiderata passavano da due sostituzioni di variabili e infine si dovevano riassemblare tutti i pezzi per calcolare l'integrale iniziale. Vi erano almeno quattro pagine di calcoli!

Con le lezioni di analisi complessa, scoprì che lo stesso integrale può essere calcolato in poche righe mediante il teorema dei residui. Non solo, integrali di cui non si poteva trovare la primitiva, come ad esempio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{2}$$

potevano essere calcolati con poco sforzo mediante il teorema dei residui.

Enunciamo allora il teorema dei residui discusso da Francesco Guglielmino nella sua tesi di laurea.

> **Teorema dei residui.** Sia Ω un aperto e $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \Omega$. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in $\Omega - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ e T un dominio regolare contenuto in Ω e tale che nessuno dei punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartenga alla frontiera di T. Supponiamo, inoltre, che l'intersezione $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \cap \mathring{T}$ non sia vuota. Allora:
>
> $$\int_{+\partial T} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \mathring{T}} Res\big(f(z); z_j\big) \tag{3}$$

Senza entrare nei dettagli - poiché non è mia intenzione fare una lezione di analisi - l'idea di fondo è molto semplice: io devo calcolare un integrale di variabile reale su un intervallo della retta reale, ma i calcoli sono difficili oppure non esiste un modo per trovare la primitiva. Allora decido di farmi *un giro* nel piano complesso e integro su un cammino più ampio che contiene l'intervallo di variabile reale: otterrò quindi un integrale di funzione complessa lungo un cammino chiuso del piano complesso. Impostando una semplice equazione mediante il teorema dei residui e isolando i vari tratti del cammino è possibile ricavare il valore dell'integrale di partenza.

2.2 Esempio di calcolo

Per chi non mastica un po' di matematica è meglio saltare questa parte. Supponiamo di voler svolgere l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{4}$$

Sappiamo che l'integrale è sommabile, quindi l'integrale esiste finito. Tuttavia non abbiamo un modo di esprimere la primitiva per calcolarlo con i metodi tradizionali.

Passiamo nel dominio complesso, estendendo la nostra funzione:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \xrightarrow{\text{in } \mathbb{C}} \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z + i \sin z}{z} \tag{5}$$

A questo punto dobbiamo scegliere un cammino nel piano complesso, includendo la singolarità[1] in $z = 0$. Scegliamo il seguente cammino:

$$\partial\Gamma = [\epsilon, R] \cup \Gamma_R(0, \pi) \cup [-R, -\epsilon] \cup \Gamma_\epsilon(\pi, 0) \tag{6}$$

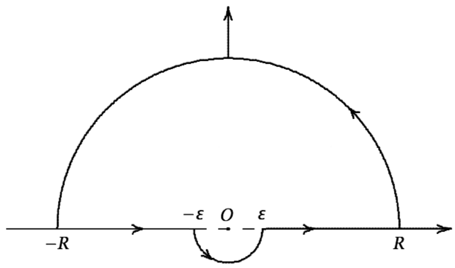

Figura 1: Cammino Γ nel piano complesso.

allora il teorema dei residui ci dice che l'integrale lungo questo cammino $\partial\Gamma$ è uguale alla somma dei residui della funzione $f(z)$ nelle singolarità moltiplicati per $2\pi i$:

$$\int_{+\partial\Gamma} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2\pi i\, Res\Big(\frac{e^{iz}}{z}; 0\Big) \tag{7}$$

Cos'è un residuo di una funzione $f(z)$ in z_0? Esprimendomi in modo rozzo, il residuo è un coefficiente particolare dello sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z)$ centrata in z_0. Per molte funzioni elementari il calcolo dei residui è un'operazione abbastanza semplice. Nel nostro caso la singolarità è in $z = 0$ ed è unica. Il suo residuo è pari a:

$$Res\Big(\frac{e^{iz}}{z}; 0\Big) = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{e^{iz}}{z} = 1 \tag{8}$$

[1]Si poteva anche escludere la singolarità, ma l'esempio vuole mostrare un possibile uso del teorema dei residui.

Spezzettando l'integrazione nelle quattro curve che compongono il cammino otteniamo:

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{\cos x + i \sin x}{x}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\cos x + i \sin x}{x}\, dx + \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2\pi i \tag{9}$$

adoperando la sostituzione $x = -\tilde{x}$ nel terzo termine, questo può essere unito al primo, ottenendo:

$$2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 2\pi i \tag{10}$$

Adoperando la sostituzione $z = R\, e^{i\theta}$ nel semicerchio grande, si nota che il modulo dell'integrale si annulla per $R \to +\infty$:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{R\, e^{i\theta}} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} iRe^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}\, d\theta \tag{11}$$

$$|e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta}| = |e^{-R\sin\theta}| \xrightarrow{R\to+\infty} 0 \tag{12}$$

Adoperando la medesima sostituzione nel semicerchio piccolo, ma con θ che varia da π a 2π:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\epsilon\, e^{i\theta}} e^{i\epsilon\cos\theta - \epsilon\sin\theta} i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\epsilon\cos\theta} e^{-\epsilon\sin\theta}\, d\theta \tag{13}$$

per $\epsilon \to 0$ otteniamo:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \quad \xrightarrow{\epsilon\to 0} \quad i \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = i\pi \tag{14}$$

sostituendo questi risultati nell'equazione inziale otteniamo in definitiva:

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx + i\pi = 2\pi i \tag{15}$$

che ci porta a concludere:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

3 Biblioteca Francesco Guglielmino

Con queste righe concludo il mio momento dedicato al Prof. Francesco Guglielmino. Un ultimo collegamento tra noi e Francesco Guglielmino può essere individuato proprio qui in biblioteca. So ch'Egli passava interamente le sue giornate all'università e in particolar modo nella sala della biblioteca, dove stava a contatto con i suoi allievi. Non è quindi un caso che la biblioteca sia stata intitolata proprio a Lui. Perché qui Lui *ci studiava.* E adesso *ci studiamo Noi.*

Buono studio!

Riferimenti bibliografici

[1] Marino Mario, *Breve storia delle cattedre di Analisi matematica dell'Università di Catania nei 150 anni dell'Italia Unitaria*, Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali - Catania BOLLAG Vol. 46, N. 376 (2013), pp. 91 - 105 ISSN 0393-7143. `http://www.gioenia.unict.it/bollettino/bollettino2013/specialFocusEdition/marino.pdf`

[2] Marino Mario (2014), *Ricordo di Francesco Guglielmino, matematico*, Boll. Accademia Gioenia di Scienze Naturali - Catania BOLLAG Vol. 47, N. 377 (2014) Full Paper, pp. FP437 - FP444 ISSN 0393-7143 `http://www.gioenia.unict.it/bollettino/bollettino2014/full_papers/CommemorazioneGuglielmino.pdf`

[3] Giuseppe Di Fazio, Michele Frasca, *Metodi matematici per l'ingegneria*, Monduzzi Editore, 2009

[4] Michele Frasca, *Temi svolti di Analisi Matematica III*, `http://www.dmi.unict.it/~frasca/appunti/analisi3.pdf`, 2002